ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ.Ε.Λ. 2022 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ.

Θέμα Α

Α1. Σελίδα 186

Α2. Σελίδα 142

Α3. Σελίδα 161

Α4 α)Σωστό β)Σωστό γ)Σωστό δ)Λάθος ε)Λάθος.

Θέμα Β

Β1.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot)\, x \ge 0 \\ \cdot)\, \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow |x| \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [0,1]$$

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1$$
$$h(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ , με } x \in [0,1]$$

Β2.

h συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,1]$

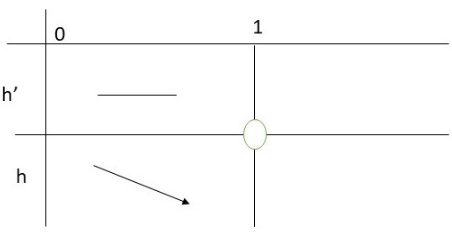
$h'(x) = 2(x-1)$

$h'(x) \le 0 \ \forall \ x \in [0,1]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα και 1-1.

$\cdot)$h συνεχής στο$[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα άρα $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1]$

$\cdot)$Θέτω h(x)=y $\Rightarrow (x-1)^2 = y \Rightarrow \sqrt{(x-1)}^2 = \sqrt{y} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y} \xrightarrow{x<1} -(x-1) = \sqrt{y} \Rightarrow x-1 = -\sqrt{y} \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$

άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, x \in [0,1]$



B3. i)

·) Φ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

·) $\lim_{x\to 1^-} \Phi(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2} = \Phi(1)$

·)άρα Φ συνεχής στο $\left[0,1\right]$

·)$\Phi(0)=1 \neq \dfrac{1}{2} = \Phi(1)$, οπότε ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

ii)

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$$

$$\Phi(1) < \eta\mu\alpha < \Phi(0)$$

οπότε απ΄το Θ.Ε.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1) : \Phi(x_o) = \eta\mu\alpha$

Θέμα Γ

Γ1. Για $x < -1$ $f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = (-2x)'$

άρα για $x < -1$ $f(x) = -2x + c_1$

Για $x > -1$ $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$

άρα για $x > -1$ $f(x) = x^3 - x + c_2$

άρα
$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, x < -1 \\ c_3, x = -1 \\ x^3 - x + c_2, x > -1 \end{cases}$$

. $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

· f συνεχής στο [illegible] άρα και στο $x_0 = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to -1^+}(x^3-x)=-1+1=0$$

$$\lim_{x\to -1^-}(-2x+c_1)=2+c_1$$

Άρα από (1) $2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$ και $c_3=0$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2, x<-1\\ 0, x=-1\\ x^3-x, x>-1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-2x-2, x\le -1\\ x^3-x, x>-1\end{cases}$

Γ2. $f(x)=\begin{cases}-2x-2, x\le -1\\ x^3-x, x>-1\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}-2, x<-1\\ 3x^2-1, x>-1\end{cases}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf στο σημείο $\Delta(x_0, f(x_0))$

$$x_0>-1$$
$$f(x_0)=x_0^{\ 3}-x_0$$
$$f'(x_0)=3x_0^{\ 2}-1$$

είναι (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0^{\ 3}-x_0)=(3x_0^{\ 2}-1)(x-x_0)$

$$\mathrm{B}(0,-2)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -2-x_0^{\ 3}+\cancel{x_0}=-3x_0^{\ 3}+\cancel{x_0} \Leftrightarrow 3x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}=2 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^{\ 3}=2 \Leftrightarrow x_0^{\ 3}=1 \Leftrightarrow x_0=1$$

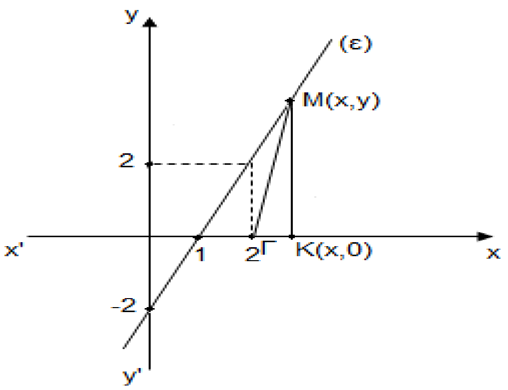
Άρα $\mathrm{A}(1, f(1))$

$$f(1)=1-1=0$$
$$f'(1)=3-1=2$$

Οπότε (ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$

Γ3. (ε): $y=2x-2$

x	0	-1
y	-2	0



- Κ προβολή του Μ στην x'x άρα $\mathrm{MK}\perp xx'$ οπότε Κ(x,0)
- Γ(2,0)
- Έστω $\mathrm{M}(x(t),y(t))$, x(t)>2 οι συντεταγμένες του Μ την τυχαία χρονική στιγμή t
  τότε $y(t)=2x(t)-2$
  οπότε $y'(t)=2x'(t)$
- t0 η χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=4$ και
  $x'(t_0)=2\mu o\nu\,/\sec$
- $$(\mathrm{MK\Gamma})=\frac{1}{2}(\Gamma\mathrm{K})(\mathrm{MK})=\frac{1}{2}\left|x_K-x_\Gamma\right|\cdot\left|y_M\right|=\frac{1}{2}\left|x-2\right|\left|y\right|=\frac{1}{2}(x-2)y$$

Άρα

$$\mathrm{E}(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)y(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\left(2x(t)-2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\cdot 2\left(x(t)-1\right)=\left(x(t)-2\right)\left(x(t)-1\right)$$

$$E'(t)=\left(x'(t)\right)\left(x(t)-1\right)+\left(x(t)-2\right)\left(x'(t)\right)$$

$$E'(t_0)=\left(x'(t_0)\right)\left(x(t_0)-1\right)+\left(x(t_0)-2\right)\left(x'(t_0)\right)=$$
$$=2(3-1)+(3-2)2=6\tau\mu\,/\sec$$

Γ4.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^2}\right]=0+1=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right]$$

. $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim_{x\to-\infty}(-2x)\overset{(-2)(-\infty)}{=}+\infty$$

Άρα $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

Για x < 0 $$\left|\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\left|\eta\mu f(x)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

Άρα για x < 0

$$\left|\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=0$$

Άρα από ΚΠ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$$

. Για $x\to-\infty$, $x<-1\Leftrightarrow-x>1$

Οπότε $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-x}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{-x^3}=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

F συνεχής ως πράξεις συνεχών

$$f'(x)=\frac{x-1}{x}$$

Είναι γν. φθίνουσα στο (0,1] και γν. αύξουσα στο [1, $+\infty$).

Στο $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή f(1)=1-ln3

Άρα $f((0,1]) = \left[f(1), \lim_{x\to 0+} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$ και

$f([1,+\infty]) = \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$

- $0 \in f((0,1])$ άρα υπάρχει μια λύση $x_1 \in (0,1]$ της $f(x)=0$. Είναι μοναδική λόγω μονοτονίας.
- $0 \in f([1,+\infty))$ άρα υπάρχει μια λύση $x_2 \in [1,+\infty)$ της $f(x)=0$. Είναι μοναδική λόγω μονοτονίας.
-

Δ2.

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ άρα f κυρτή.

Δ3.

$x_1 < x < 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x) \Rightarrow f(x) < 0$

$1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < f(x_2) \Rightarrow f(x) < 0$

Άρα $f(x) < 0$ στο $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned}
E &= -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x)dx = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} x' \ln 3x dx - \int_{x_1}^{x_2} x\, dx = \\
&= [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \frac{1}{x} dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \\
&= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - x_2 + x_1 - \frac{{x_2}^2}{2} + \frac{{x_1}^2}{2} = \\
&= {x_2}^2 - {x_1}^2 - x_2 + x_1 - \frac{{x_2}^2}{2} + \frac{{x_1}^2}{2} = \\
&= \ldots = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)
\end{aligned}$$

** $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln x_1$, $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ln x_2$,

Δ3

Είναι $E > 0,\ \ x_2 - x_1 > 0.$ Άρα $2 - x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1$ και f γν. αύξουσα x>1

έτσι $f(x_2) > f(2 - x_1) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$

* $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$

Δ4

Για $x = x_2$ δεν έχουμε λύση αφού η δοθείσα δίνει $\ln 3 = 1$ (άτοπο)

Για $x \neq x_2$ η εφαπτομένη στο x_2 είναι

$y - f(x_2) = f'(x_2)\left(x - x_2\right) \Leftrightarrow y = f'(x_2)\left(x - x_2\right)$

f κυρτή στο $\left(0, +\infty\right)$ άρα η γρ. παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη.

Δηλαδή $f(x) > f'(x_2)(x - x_2)$

Αλλά $f(x) \geq f(1)$

Αρα $2f(x) > f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$ δηλαδή η εξίσωση δεν έχει λύση.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

-ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

-ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ

-ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

-ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

-ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ