

ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΓΕΛ 2025

ΘΕΜΑ Α. Α1 σελ 186 ΘΕΩΡΗΜΑ

Α2 σελ 76 ΘΕΩΡΗΜΑ

Α3 σελ 161 ΟΡΙΣΜΟΣ

Α4: $\alpha) \Sigma \beta) \Sigma \gamma) \wedge \delta) \wedge \epsilon) \Sigma$

ΘΕΜΑ Β. Β1) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$. Στο $x_0 = 1$ έχει ακρότατο, οπότε από το Θ.Φ. : $f'(1) = 0$

$$12 + 2\alpha = 0$$

$$\alpha = -6$$

$$B2) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \text{ άρα } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16 - 12 = 4$ άρα έχουμε ρίζες 3 και 1

Οπότε $f' \geq 0$ στο $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ και $f' \leq 0$ στο $[1, 3]$ άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ και $\searrow$ στο $[1, 3]$

Στο $A_1 = (-\infty, 1]$ η f είναι συνεχής και έχει μη αρνητική παράγωγο άρα η f είναι γν. αυξ στο και $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)) = (-\infty, 1]$ και $f([0, 1]) = [-3, 1]$ άρα η ρίζα θετική

$0 \in f(A_1)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα στο A_1 που είναι μοναδική λόγω μονοτονίας

Στο $A_2 = [1, 3]$ η f είναι συνεχής και η παράγωγος της είναι μη θετική οπότε η f είναι γν. φθ. και $f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

$0 \in f(A_2)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα στο A_2 που είναι μοναδική λόγω μονοτονίας

Στο $A_3 = [3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και η παράγωγος της είναι μη αρνητική οπότε η f είναι γν. αυξ. και $f(A_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-3, +\infty)$

$0 \in f(A_3)$ άρα η $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα στο A_3 που είναι μοναδική λόγω μονοτονίας

Άρα η $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες

$$B3) f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

f είναι συνεχής και έχει μη αρνητική δεύτερη παράγωγο στο $[2, +\infty)$ οπότε η f είναι κυρτή

f είναι συνεχής και έχει μη θετική δεύτερη παράγωγο στο $(-\infty, 2]$ οπότε η f είναι κοίλη

Σημείο καμπής το $K(2, f(2))$ δηλαδή το $K(2, -1)$

$$B4) g(x) = x + f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3 \text{ άρα } g'(x) = f'(x) + 1$$

Η εφαπτ. της C_f στο ξ έχει εξίσωση : $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Η εφαπτ. της C_g στο ξ έχει εξίσωση : $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$

$$y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + f(\xi) + \xi$$

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + x - \xi + f(\xi) + \xi$$

$y = f'(\xi)(x - \xi) + x + f(\xi)$ και ισχύει επίσης $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ άρα

$$f'(\xi)(x - \xi) + x + f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

$$x = 0$$

Άρα τέμνονται στο $x = 0$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta_{\mu}(x) & , x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , x \geq 0. \end{cases}$$

Γ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta_{\mu}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta_{\mu}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x = 0$.

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$y = x + \frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτ. στο $+\infty$

Έχουμε $-1 \leq \eta_{\mu}(x) \leq 1 \iff -e^x \leq e^x \eta_{\mu}(x) \leq e^x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta_{\mu}(x) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής άρα η $y = 0$ οριζόντια ασυμπτ. στο $-\infty$.

Τέλος, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ δηλ. δεν έχει κατακόρυφη ασυμπτ.

Γ3. Θέτω $\phi(x) = e^x \eta(x) - x - \frac{1}{2}$
 $\phi(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$, $\phi(0) = -\frac{1}{2} < 0$ και ϕ συν. στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών άρα από
 Θ.Βολ. υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τ.ω. $\phi'(\xi) = 0$.

Γ4.

$$y'(t) = x'(t) \iff \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \iff 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

Για $2x + 1 \geq 0$, $2x + 1 = 2\sqrt{x^2 + x} \iff 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 4x \iff 1 = 0$ αδύνατο
 Αλλιώς πάλι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει t_0 τ.ω. $x'(t_0) = y'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F'(x) = f(x) \quad x > 0$$

$$x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon \varphi \parallel (\varepsilon) : y = 2x \Rightarrow \lambda \varepsilon \varphi = \lambda \varepsilon \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$H(1) \text{ για } x=1 : f(1)=0$$

$$\Delta 1. \quad g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2}$$

$$(x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = (e^{\ln^2 x}) \cdot (\ln^2 x)' =$$

$$e^{\ln^2 x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right)$$

Άρα

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{xf(x) \cdot x^{\ln x} - 2 \ln x \cdot F(x) \cdot x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$\frac{x^{\ln x} (xf(x) - 2F(x) \ln x)}{(x^{\ln x})^2} = 0 \quad (\text{από αρχική σχέση})$$

Και $g(x)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών άρα $g(x) = C$

$$\Delta 2. \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \stackrel{DLH}{=} 1$$

ii)

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε :

$$f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + 2\frac{F(x)}{x}$$

$$\text{Και για } x=1 : f(1) + f'(1) = 2F(1) \Rightarrow 0 + 2 = 2F(1) \Rightarrow F(1) = 1$$

$$\text{Και για } g(x)=C : \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = C \Rightarrow F(x) = C \cdot x^{\ln x}$$

$$\text{Για } x=1 : F(1) = C \cdot 1^0 \Rightarrow 1 = C$$

$$\text{Άρα } F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0$$

$$\Delta 3. F'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \frac{2 \ln x}{x}, \quad x > 0$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^{\ln x}, \quad x > 0 \quad \text{άρα } F'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$$

x	0	1
F'(x)	-	0
F(x)	↘	↗

$F(x) \downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

και η $F(x)$ έχει $\min$ το $F(1)$

άρα $F(x) \geq 1 \quad \forall x > 0$ με το ίσον για $x = 1$

$$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$$

$$\text{Για } 0 < x \leq 1 \stackrel{F \downarrow}{\text{ισχύει}} x^2 \leq x \Rightarrow F(x^2) \geq F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) \geq 0 \text{ με ίσον για } x = 1$$

$$\text{Για } x \geq 1 \stackrel{F \uparrow}{\text{ισχύει}} x^2 \geq x \Rightarrow F(x^2) \geq F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) \geq 0 \text{ με το ίσον για } x = 1$$

$$F(x^2) - F(x) \geq 0 \quad \forall x > 0 \text{ με το ίσον για } x = 1$$

$$\text{Άρα και } -(x-1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ άρα και στο } (0, +\infty) \text{ με το ίσον για } x = 1$$

$$\begin{aligned} &F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \\ \text{Οπότε για να ισχύει η ισότητα} &\text{ Πρέπει } F(x^2) - F(x) = 0 \text{ και } -(x-1)^2 = 0 \text{ άρα } x = 1 \end{aligned}$$

Δ4.

$$\left. \begin{aligned} E &= \int_1^e |F(x)| dx \\ F(x) &= x^{\ln x} \geq 0 \quad \forall x \in [1, e] \end{aligned} \right\} E = \int_1^e F(x) dx \Rightarrow E = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

$$\text{Βασική ανισότητα: } e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ με το ίσον για } x = 0$$

$$\text{Θέτω όπου } x \text{ το } \ln^2 x: e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \text{ με το ίσον για } x = 1$$

Άρα

$$E = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

$$I = \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e (\ln^2 x) dx + \int_1^e 1 dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + e - 1 =$$

$$\left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx + e - 1 = e \ln^2 e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx + e - 1 =$$

$$e - 2 \left[x \ln x \right]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 = e - 2(e \ln e) + 2(e - 1) + e - 1 =$$

$$e - 2e - 1 + e - 1 = 2e - 3$$

$$\text{Άρα } E > 2e - 3$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ

ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ
ΔΕΣΠΟΙΝΑ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΕΝΤΗΣ

ΕΛΕΝΗ ΛΙΑΚΟΥΡΑ
ΘΑΝΑΣΗΣ ΜΑΛΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΡΑΛΟΣ