ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ
ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ιδιότητα ιι σελ 65 Σχολ

Α2. Ορισμός σελ 87 Σχολ

Α3. Ορισμός σελ 27 Σχολ

Α4.

α΄. Λάθος

β΄. Σωστό

γ΄. Σωστό

δ. Σωστο

ε. Λάθος

Β′ Θέμα

Β1. Για να ορίζεται η $f \circ g$, πρέπει:

$$A_{fog} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\}$$

Δηλαδή:

$$x \geq 2 \quad \text{και} \quad \sqrt{x-2}+1 > 1 \iff \sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Συναληθεύοντας τις δύο συνθήκες, προκύπτει: $A_{fog} = (2, +\infty)$.

Ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}+1) = 2\ln(\sqrt{x-2}+1-1) = 2\ln(\sqrt{x-2})$$

$$h(x) = 2\ln(x-2)^{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2), \quad x > 2$$

Β2.
Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $A = (2, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0, \quad \forall x > 2$$

Επειδή $h'(x) > 0$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, οπότε είναι «1-1» και αντιστρέφεται.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (2, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(A) = h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

- $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$ (καθώς $\lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+$)
- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$ (καθώς $\lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$)

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $A_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Εύρεση της h^{-1}:
Θέτω $h(x) = y$ για $x > 2$:

$$y = \ln(x-2) \iff e^y = x-2 \iff x = e^y + 2$$

Άρα: $h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Β3.
Ζητείται το όριο: $\lim_{x\to 2^+}\left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2}\right) = \ell$

* Για το κλάσμα $\frac{f(x)}{x-2}$, επειδή εμφανίζει απροσδιοριστία $\left[\frac{0}{0}\right]$, εφαρμόζουμε τον κανόνα Δε Λ′ Ho-σπιταλ:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{(2\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

* Επειδή $\lim_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$, το τελικό όριο είναι:

$$\ell = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$$

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$$

Αν κ≠0 τότε $L=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\kappa x$

L=+∞ αν κ>0 και L= -∞ αν κ<0

Άτοπο συνεπώς κ=0

Η y=x εφάπτεται της C_f στο (0,0) άρα

$$\left.\begin{aligned} &f'(0)=1\\ &f'(x)=\frac{\mu(x^2+1)-2x(\mu x)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}\right\}\frac{\mu-0}{1}=1\Leftrightarrow \mu=1$$

Γ2.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		−	0	+	0	−	
f		↘	Τ.Ε	↗	Τ.Μ	↘	

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_1=(-\infty,-1],\ f(\Delta_1)=[-\frac{1}{2},0)\\&\Delta_2=[-1,1],\ f(\Delta_2)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\\&\Delta_3=[1,+\infty),\ f(\Delta_3)=(0,\frac{1}{2}]\end{aligned}\right\}f(D_f)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$$

$f(x)=\frac{1}{2}+a^2$ για $a\neq 0$

$\frac{1}{2}+a^2>\frac{1}{2}$ άρα $\frac{1}{2}+a^2\notin f(D_f)$ άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες

Για α=0 η $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την x=1

Γ3.

$$\mathrm{I}_\nu=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$$

i) $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+1}$ (1)

$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx$$

$$=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$$

ii) $\mathrm{I}_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1=\frac{\ln 2}{2}$

Από την (1) για ν=0

$$\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{I}_1=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}$$

Η (1) για ν=1

$$\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \mathrm{I}_2=\frac{1}{4}-\frac{1-\ln 2}{2}=\frac{-1+2\ln 2}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $K(x) = g(x) + x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 0]$.

- $K(-1) = g(-1) - 1 < 0$ (αφού $g(x) < 1$).
- $K(0) = g(0) > 0$ (αφού $g(x) > 0$).

Από το Θεώρημα Βολζανο, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $K(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.
Επειδή $K'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και η K' είναι συνεχής, η K' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η K είναι γνησίως μονότονη, γεγονός που εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του x_1.

Δ2.

Η f συνεχής στο $x = 0$, ως παραγωγίσιμη:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x(g(x) + x) = 0 \cdot g(0) = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\epsilon\phi x}{x \cdot \sigma\nu x} - \kappa\right)$

$$= 2 \cdot 1 + 1 - \kappa$$

Η f παραγωγίσιμη στο $x = 0$ άρα:

$$3 - \kappa = 0 \iff \kappa = 3$$

Δ3.

ι) $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις συνεχών.

$f'(x) = 2\sigma\nu x + \frac{1}{\sigma\nu^2 x} - 3$

$f'(x) = \frac{2\sigma\nu^3 x - 3\sigma\nu^2 x + 1}{\sigma\nu^2 x} = \frac{(\sigma\nu x - 1)\cdot(2\sigma\nu^2 x - \sigma\nu x - 1)}{\sigma\nu^2 x}$

$$= \frac{(\sigma\nu x - 1)\cdot 2\left(\sigma\nu x + \frac{1}{2}\right)\cdot(\sigma\nu x - 1)}{2\sigma\nu^2 x} = \frac{(\sigma\nu x - 1)^2 \cdot 2\cdot\left(\sigma\nu x + \frac{1}{2}\right)}{\sigma\nu^2 x}$$

Σχήμα Ηορνερ για τον αριθμητή:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & -1 & -1 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \end{array}$$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\sigma\nu x = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$\Phi(x) = \sigma\nu x + \frac{1}{2} = 0 \iff \sigma\nu x = -\frac{1}{2} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
και συνεχής, άρα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ διατηρεί πρόσημο με $\Phi(0) > 0$.
Άρα $\Phi(x) > 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ιι) $f \nearrow$ και συνεχής άρα $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$
$\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ άρα $\exists\, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$
μοναδικό γιατί η f είναι γν. μονότονη.

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\nu x}\right) = 1\cdot(+\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sigma\nu x = 0 \quad$ και $\quad \sigma\nu x > 0$

άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\nu x} = +\infty$

Δ4.

ι) Αν $K \searrow \Longrightarrow -1 < x_1 < 0 \xrightarrow{K\searrow}$

$$K(-1) > K(x_1) > K(0)$$

$$K(-1) > 0 > K(0)$$

$$0 > g(0) \quad \text{Άτοπο.}$$

άρα K γν. αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

$x_1 \leq x < 0 \xrightarrow{K\nearrow} K(x_1) = 0 \leq K(x) \iff g(x) + x \geq 0$ και $x^2 \geq 0$ άρα $f(x) \geq 0$

ιι)

$\Omega \sim C_f,\ x'x,\ x = x_1,\ x = x_2 = \frac{\pi}{3}$

$$\Omega = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\, dx = \int_{x_1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx$$

Εξισώνοντας τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx$$

$$\int_{x_1}^{0} \left[\left(\frac{x^3}{3}\right)'(g(x) + x)\right] dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\epsilon\phi x}{\sigma\nu x} - 3x\right) dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}(g(x) + x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}(g'(x) + 1)\, dx = \left[-2\sigma\nu x - \ln|\sigma\nu x| - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$-\int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\, dx - \left[\frac{x^4}{12}\right]_{x_1}^{0} = -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - 3\frac{\pi^2}{18} + (2)$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{3} \cdot \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\, dx + \frac{x_1^4}{12} = +1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Longrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\, dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\, dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 - 3\ln 2$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ, ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ ΚΑΙ ΡΑΦΗΝΑΣ

-ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

-ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

-ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΕΝΤΗΣ

-ΜΑΓΔΑ ΔΙΑΚΑΤΟΥ

-ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

-ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

-ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

-ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ